数理解析研究所講究録 1281 巻 2002 年 141-145

COMPLEX CURVES OF GENUS 3, KUMMER SURFACES, AND QUILLEN METRICS

川口 周 (SHU KAWAGUCHI)* AND 吉川 謙一 (KEN-ICHI YOSHIKAWA)†

1. はじめに

本稿は [4] に基づいている．詳細は [4] を参照してほしい．

(X,k_X) をコンパクト Kähler 多様体とし，$\lambda(\mathcal{O}_X):=\otimes_{q=0}^{\dim X}(\det H^q(X,\mathcal{O}_X))^{(-1)^q}$ をそのコホモロジーの行列式とする．このとき，$\lambda(\mathcal{O}_X)$ 上に Quillen 計量と呼ばれる計量 $\|\cdot\|_Q$ が定まる．大ざっぱに言って，Quillen 計量は，$\lambda(\mathcal{O}_X)$ 上の L^2- 計量にラプラシアンの行列式の重み付き交代積（解析的捩れ）を乗じたものである（§2 参照）．

Quillen 計量は，いくつかのコンパクト Kähler 多様体に対し，具体的に求められている．例えば，種数 1 のコンパクト Riemann 面の場合，Kronecker の極限公式と等価な次の関係式が成り立つ．

定理 1.1 (Ray-Singer [7]). $E=\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ を種数 1 のコンパクト Riemann 面，$k_E=(\mathrm{Im}\tau)^{-1}dz\otimes d\bar{z}$ を体積が 1 の平坦 Kähler 計量とする．Serre 双対により，$H^1(E,\mathcal{O}_E)^\vee$ と $H^0(E,\Omega_E^1)$ を同一視することによって，$\lambda(\mathcal{O}_C)$ を $H^0(C,\mathcal{O}_C)\otimes H^0(E,\Omega_E^1)$ と同一視する．$\Delta(\tau)$ を Jacobi の Δ 関数とする．このとき，(E,k_E) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_E)$ 上の Quillen 計量は

$$\|1\otimes dz\|_Q^2=2^{-2}|\Delta(\tau)|^{-\frac{1}{6}}$$

で与えられる．

次に，X を種数 2 のコンパクト Riemann 面とする．X 上の Wierstrass 点をとり，X を Jacobi 多様体 $J=\mathbb{C}^{\prime}\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ に埋め込む．このとき，標準的に $\lambda(\mathcal{O}_X)\simeq\lambda(\mathcal{O}_J)\otimes\Omega_J^2$ となる．この同型を通じて $1\otimes(dz_1\wedge dz_2)$ に対応する $\lambda(\mathcal{O}_X)$ の元を σ とおく．$k_J={}^t dz(\mathrm{Im}\tau)^{-1}d\bar{z}$ を J 上の平坦な Kähler 計量とし，$k_X=k_J|_X$ を k_J の X への制限とする．このとき，(X,k_X) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_X)$ 上の Quillen 計量は次で与えられる（[11] も参照）．

定理 1.2 (Bost–Mestre–Moret-Bailly [2], 上野 [9]). $\chi_2(\tau)=\prod_{(a,b):\mathrm{even}}\theta_{ab}(0,\tau)$ を井草の保型形式とする．$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とし，$c_2=2^{-\frac{2}{3}}\pi^{-\frac{2}{3}}e^{-4\zeta'(-1)}$ とおく．このとき，(X,k_X) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_X)$ 上の Quillen 計量は

$$\|\sigma\|_Q^2=c_2(\det\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{6}}|\chi_2(\tau)|^{-\frac{1}{3}}$$

で与えられる．

他にも，種数 2 以上のコンパクト Riemann 面 M を，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}_1$（$\mathfrak{H}_1$ は上半平面，Γ は $PSL(2,\mathbb{R})$ の疎な部分群）と同一視し，$\Gamma\backslash\mathfrak{H}_1$ 上の計量として Poincaré 計量 ρ を考えた場合，(M,ρ) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_M)$ 上の Quillen 計量は，Selberg ゼータ関数の特殊値と関連することが知られている（D'Hocker-Phong [3], Sarnak [8]）．また，高次元のコンパクト Kähler 多様体の場

* 京都大学大学院理学研究科 (Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University).
† 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo).

合，アーベル多様体のテータ因子から定まる Quillen 計量，および対合を持つ K3 曲面から定まる同変 Quillen 計量は，それぞれモジュライ空間上の保型形式と関連することが知られている（吉川 [11], [12]）．

さて，C を種数 3 のコンパクト Riemann 面とする．このとき，非分岐な二重被覆 $\pi : D \to C$ に応じて，C は Kummer 曲面 $\mathrm{Kum}(A)$ の因子として実現できる（§3 参照）．ここで，A は周期 $(1,\tau)$ のアーベル曲面で，$\mathrm{Kum}(A) = A/[-1]_A$ である．$k_A = {}^t dz (\mathrm{Im}\tau)^{-1} d\bar{z}$ を A 上の平坦な Kähler 計量とする．$k_{\mathrm{Kum}(A)}$ を orbifold の意味で k_A から誘導される $\mathrm{Kum}(A)$ 上の Kähler 計量とし，$k_C = k_{\mathrm{Kum}(A)}|_C$ とおく．すると，(C, k_C) はコンパクト Kähler 多様体である．

以下，(C, k_C) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_C)$ 上の Quillen 計量が，定理 1.1 や 定理 1.2 のように具体的に求められることを見てゆく（§4 参照）．

2. Quillen 計量

この節では Quillen 計量 について復習する．(X, k_X) をコンパクト Kähler 多様体，(F, h_F) を X 上の正則な Hermite ベクトル束とする．$A^{0,q}(F)$ を F に値をもつ滑らかな $(0,q)$- 形式のなす空間，$\Box_F^{0,q}$ を $A^{0,q}(E)$ に作用するラプラシアンとする．$\sigma(\Box_F^{0,q})$ を $\Box_F^{0,q}$ のスペクトルとし，各 $\lambda \in \sigma(\Box_F^{0,q})$ に対して，$E_F^{0,q}(\lambda)$ を λ に対応する $\Box_F^{0,q}$ の固有空間とする．

このとき，ラプラシアン・ゼータ関数 $\zeta^{0,q}(s,F)$ が $\zeta^{0,q}(s,F) := \sum_{\lambda \in \sigma(\Box_F^{0,q}) \setminus \{0\}} \dim E_F^{0,q}(\lambda) \lambda^{-s}$ で定義される．$\zeta^{0,q}(s,F)$ は $\mathrm{Re}(s) > \dim X$ で絶対収束し，複素平面 $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され，$s = 0$ で正則であることが知られている．$\det{}^* \Box_F^{0,q} := \exp(-\frac{d}{ds}|_{s=0} \zeta^{0,q}(s,F))$ とおく．

定義 2.1 ([7]). 解析的捩れとは，$\tau(X,F) = \prod_{q \geq 0} (\det{}^* \Box_F^{0,q})^{(-1)^q q}$ で定義される正の数である．

$\lambda(F) = \otimes_{q=0}^{g} (\det H^q(X,F))^{(-1)^q}$ をコホモロジーの行列式とする．$\lambda(F)$ には，以下のように L^2- 計量と Quillen 計量が定まる．$\mathcal{H}^{0,q}(X,F) := E_F^{0,q}(0)$ を調和 $(0,q)$- 形式のなす空間とする．Hodge の定理より，$H^q(X,F)$ は $\mathcal{H}^{0,q}(X,F)$ と同一視され，その積分を通じて $\lambda(F)$ に Hermite 計量が入る．この計量を L^2- 計量と呼び，$\|\cdot\|_{L^2}$ で表す．

定義 2.2 ([6]). $\lambda(F)$ の Quillen 計量とは，$\|\cdot\|_Q^2 := \tau(X,F) \, \|\cdot\|_{L^2}$ で定義される計量である．

Quillen 計量は，Riemann 面上のベクトル束の場合に（正確にはその族の場合に）Quillen が考察した．また，Quillen 計量は，Gillet と Soulé が Arakelov 幾何の算術的 Riemann-Roch の定理を確立する際に用いられた．

次に，Bismut 達によって拡張された群作用付きの Quillen 計量（上記の同変版）について，その特別な場合である対合付きの場合に述べたい（詳細は [1] を参照）．

以下では，正則な対合射 $\iota : X \to X$ で k_X を保つものが存在すると仮定する．μ_2 で位数 2 の群を表せば，μ_2 の生成元と ι を同一視することにより，μ_2 は X に作用する．さらに，μ_2 の作用が F に持ち上がり h_F を保つと仮定する．

k_X, h_F は ι- 不変なので，ι は $E_F^{0,q}(\lambda)$ に作用し，$E_F^{0,q}(\lambda)$ を ι^*- 不変部分空間 $E_F^{0,q}(\lambda)_+$ と ι^*- 反不変部分空間 $E_F^{0,q}(\lambda)_-$ の直交直和に分解する．ゼータ関数 $\zeta_{\pm}^{0,q}(s,F)$ を $\zeta_{\pm}^{0,q}(s,F) := \sum_{\lambda \in \sigma(\Box_F^{0,q}) \setminus \{0\}} \dim E_F^{0,q}(\lambda)_{\pm} \lambda^{-s}$ で定める．$\det{}_{\pm}^* \Box_F^{0,q} := \exp(-\frac{d}{ds}|_{s=0} \zeta_{\pm}^{0,q}(s,F))$ とおく．

定義 2.3 ([1]). μ_2- 同変な解析的捩れとは, $k=0,1$ に対し,

$$\tau_{\mu_2}(X,F)(\iota^k)=\left(\prod_{q\geq 0}(\det{}^*_+\square_F^{0,q})^{(-1)^q q}\right)\left(\prod_{q\geq 0}(\det{}^*_-\square_F^{0,q})^{(-1)^q q}\right)^{(-1)^k}$$

で定義される正の数である.

$H^q(X,F)_\pm$ を $H^q(X,F)$ の ι に関する ± 1- 固有空間とし,

$$\lambda(F)_\pm=\otimes_{q=0}^g(\det H^q(X,F))_\pm)^{(-1)^q},\quad \lambda_{\mu_2}(F)=\lambda(F)_+\oplus\lambda(F)_-$$

とおく. $\lambda_{\mu_2}(F)$ は μ_2- 同変なコホモロジーの行列式と呼ばれる. (群作用のない場合の) コホモロジーの行列式のときと同様に, 分解 $H^q(X,F)=H^q(X,F)_+\oplus H^q(X,F)_-$ に応じて, $\lambda(F)_\pm$ に L^2- 計量 $\|\cdot\|_{L^2,\lambda(F)_\pm}$ が定まる.

定義 2.4 ([1]). μ_2- 同変な Quillen 計量とは, $k=0,1$ と $\varphi=(\varphi_+,\varphi_-)\in\lambda_{\mu_2}(F)$ に対し,

$$\|\varphi\|^2_{Q,\lambda_{\mu_2}(F)}(\iota^k)=\tau_{\mu_2}(X,F)(\iota^k)\ \|\varphi_+\|^2_{L^2,\lambda(F)_+}\ \|\varphi_-\|^{(-1)^k 2}_{L^2,\lambda(F)_-}$$

で定義される $\lambda_{\mu_2}(F)$ 上の関数 $\|\cdot\|^2_{Q,\lambda_{\mu_2}(F)}(\iota^k)$ のことである.

$\tau_{\mu_2}(X,F)(1)$ は, 定義 2.1の解析的捩れ $\tau(X,F)$ に一致する. $\lambda(F)$ は $\det\lambda_{\mu_2}(F)$ に (符合の差を除いて) 標準的に同型である. この同型を通して $\|\cdot\|^2_{Q,\lambda_{\mu_2}(F)}(1)$ から定まる $\lambda(F)$ の計量は, 定義 2.2の Quillen 計量 $\|\cdot\|^2_Q$ に一致する.

3. 種数 3 の非特異射影曲線と Kummer 曲面

この節では, 種数 3 の非特異射影曲線が Kummer 曲面の因子として実現されることを見る. $\mathfrak{H}_2=\left\{\tau=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}\\ \tau_{12}&\tau_{22}\end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})\ \middle|\ \mathrm{Im}\tau>0\right\}$ を次数が 2 の Siegel 上半空間, Δ を対角行列の $Sp_2(\mathbb{Z})$ 軌道がなす $\mathfrak{H}_2$ 上の因子とする. $\tau\in\mathfrak{H}_2$ に対し, A_τ を $A_\tau=\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2+\tau\mathbb{Z}^2$ とおく. Θ_τ を A_τ のテータ因子とする. μ_2 を $[-1]_{A_\tau}$ で生成される $\mathrm{Aut}_{hol}(A_\tau)$ の部分群とする.

$a\in\{0,1\}^2$ に対し, $\mathbf{f}_a(z):=\theta_{\frac{a}{2},0}(2z,2\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}^2}\exp\pi i\left\{{}^t(n+\frac{a}{2})2\tau(n+\frac{a}{3})+2{}^t(n+\frac{a}{2})2z\right\}$ とおく. $\{\mathbf{f}_a\}_{a\in\{0,1\}^2}$ は $H^0(A_\tau,\mathcal{O}_{A_\tau}(2\Theta_\tau))$ の基底になる. 線型系 $|2\Theta_\tau|$ は基底点自由であり,

$$\Phi_{|2\Theta_\tau|}:A_\tau\ni z\to(\mathbf{f}_{10}(z):\mathbf{f}_{11}(z):\mathbf{f}_{01}(z):\mathbf{f}_{00}(z))\in\mathbb{P}^3$$

を定める. $\mathbf{f}_a(z)$ は偶関数なので, $\Phi_{|2\Theta_\tau|}$ は $\Psi_\tau:K_\tau=A_\tau/\mu_2\to\Phi_{|2\Theta_\tau|}(A_\tau)\subset\mathbb{P}^3$ を導く. このとき, $\tau\in\mathfrak{H}_2\setminus\Delta$ であれば, K_τ は $\Phi_{|2\Theta_\tau|}(A_\tau)$ と同型であることが知られている.

$u=(u_{10},u_{11},u_{01},u_{00})\in\mathbb{C}^4\setminus\{0\}$ に対し, $D_{u,\tau}:=\{z\in A_\tau\mid\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}u_\varepsilon\mathbf{f}_\varepsilon(z)=0\}\subset A_\tau$ とおく. $\mathbf{f}_a(z)$ は偶関数なので, μ_2 は $D_{u,\tau}$ に作用する. $C_{u,\tau}=D_{u,\tau}/\mu_2$, すなわち,

$$C_{u,\tau}:=\{z\in K_\tau\mid\sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^2}u_\varepsilon\,\mathbf{f}_\varepsilon(z)=0\}\subset K_\tau$$

とおく.

命題 3.1. (1) $\tau\in\mathfrak{H}_2$ とする. このとき, 一般の点 $u\in\mathbb{C}^4\setminus\{0\}$ をとれば, $D_{u,\tau}$ は種数 5 の非特異射影曲線であり, μ_2 は $D_{u,\tau}$ に自由に作用する. また, $C_{u,\tau}$ は種数 3 の非特異射影曲線である.

(2) C を種数 3 の非特異射影曲線，$\pi: D \to C$ を非分岐な二重被覆とする．このとき，次をみたす $\tau \in \mathfrak{H}_2$ と $u \in \mathbb{C}^4$ が存在する：$D_{u,\tau}$ と $C_{u,\tau}$ はそれぞれ D と C に同型で，$\pi: D \to C$ は自然な射 $D_{u,\tau} \to C_{u,\tau}$ と同一視される．

$\mathrm{Prym}(D/C)$ を $\pi: D \to C$ に付随する Prym 多様体とする．今の場合，$\mathrm{Prym}(D/C)$ は Abel 曲面である．C が超楕円的ではない場合は，Abel-Prym 射 $\beta: D \to \mathrm{Prym}(D/C)$ を用いて，(2) の $D_{u,\tau}$ と $C_{u,\tau}$ を構成することができる（[10] 参照）．

4. 定理と証明の方針

簡単のため，以下では C は種数 3 の超楕円的ではない非特異射影曲線とする．$\pi: D \to C$ を非分岐な二重被覆とする．命題 3.1(2) のような $(u,\tau) \in (\mathbb{C}^4 \setminus \{0\}) \times \mathfrak{H}_2$ をとり，D, C をそれぞれ $D_{u,\tau}, C_{u,\tau}$ と同一視する．D は $2\Theta_\tau$ に線型同値な A_τ の因子であって，π は自然な射 $D \to C = D/\mu_2$ と同一視された．

C を超楕円的ではないと仮定しているので，$\tau \in \mathfrak{H}_2 \setminus \Delta$ となることがわかる．従って，K_τ は $\Phi_{|2\Theta_\tau|}(A_\tau) \subset \mathbb{P}^3$ と同型になり，K_τ を $\mathbb{P}^3$ 内の曲面とみなすことができる．すると，C は K_τ と u で定まる $\mathbb{P}^3$ の超平面の交叉である．

$k_{A_\tau} = {}^t dz (\mathrm{Im}\tau)^{-1} d\bar{z}$ を A_τ 上の平坦な Kähler 計量とする．k_{K_τ} を orbifold の意味で k_{A_τ} から誘導される K_τ の Kähler 計量とする．$k_C = k_{K_\tau}|_C$ とおく．(C, k_C) はコンパクト Kähler 多様体である．

これから述べる定理は (C, k_C) から定まる $\lambda(\mathcal{O}_C)$ 上の Quillen 計量を具体的に求めるというものであるが，その前に，$\lambda(\mathcal{O}_C)$ の標準的な元 $\varphi(u,\tau)$ と，2 つの多項式 $F(z,\tau), G(z,\tau) \in \mathcal{O}(\mathfrak{H}_2)[z]$ を定義する．

Serre 双対により，$H^1(C,\mathcal{O}_C)^\vee$ と $H^0(C,\Omega^1_C)$ を同一視することによって，$\lambda(\mathcal{O}_C) = \det H^0(C,\mathcal{O}_C) \otimes \det H^1(C,\mathcal{O}_C)^\vee = H^0(C,\mathcal{O}_C) \otimes \det H^0(C,\Omega^1_C)$ となる．$u_a \neq 0$ のとき，

$$\varphi(u,\tau) := 1 \otimes \frac{1}{u_a} \bigwedge_{b \neq a} \mathrm{Res}_C \left(\frac{\mathbf{f}_b(z,\tau)}{\sum_{c \in \{0,1\}^2} u_c \mathbf{f}_c(z,\tau)} dz_1 \wedge dz_2 \right) \in \lambda(\mathcal{O}_C)$$

とおく．ここで，$\mathrm{Res}_C : H^0(K_\tau, \Omega^2_{K_\tau}(\log C)) \to H^0(C, \Omega^1_C)$ は Poincaré residue を表し，$\frac{\mathbf{f}_b(z,\tau)}{\sum_{c \in \{0,1\}^2} u_c \mathbf{f}_c(z,\tau)} dz_1 \wedge dz_2$ は K_τ 上の 2- 形式と見なしている．$\varphi(u,\tau)$ は $u_a \neq 0$ となる a の取り方に依らないことがわかる．

保型形式 $\alpha(\tau)$，$\beta(\tau)$，$\gamma(\tau)$，$\delta(\tau)$ を $\alpha = \mathbf{f}_{10}(0)$，$\beta = \mathbf{f}_{11}(0)$，$\gamma = \mathbf{f}_{01}(0)$，$\delta = \mathbf{f}_{00}(0)$ で定める．また，$A(\tau), B(\tau), C(\tau), D(\tau), E(\tau)$ を

$$\begin{aligned}
A(\tau) &= (\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \\
B(\tau) &= (\beta^4 + \gamma^4 - \alpha^4 - \delta^4)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \\
C(\tau) &= (\gamma^4 + \alpha^4 - \beta^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\gamma^2\delta^2 - \alpha^2\beta^2), \\
D(\tau) &= (\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 - \delta^4)(\alpha^2\delta^2 - \beta^2\gamma^2)(\beta^2\delta^2 - \gamma^2\alpha^2), \\
E(\tau) &= \alpha\beta\gamma\delta(\delta^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)(\delta^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2) \\
&\quad \times (\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2).
\end{aligned}$$

で定める．そして，$z=(z_{10},z_{11},z_{01},z_{00})\in\mathbb{C}^4$ に対し，

$$F(z,\tau)=A(\tau)(z_{10}^4+z_{11}^4+z_{01}^4+z_{00}^4)+B(\tau)(z_{10}^2z_{00}^2+z_{11}^2z_{01}^2)$$
$$+C(\tau)(z_{11}^2z_{00}^2+z_{01}^2z_{10}^2)+D(\tau)(z_{01}^2z_{00}^2+z_{10}^2z_{11}^2)+2E(\tau)z_{01}z_{11}z_{01}z_{00}$$

とおく．$F(z,\tau)\in\mathcal{O}(\mathfrak{H}_2)[z]$ は Kummer 曲面 K_τ の定義多項式である．すなわち，$K_\tau=\{z\in\mathbb{P}^3\mid F(z,\tau)=0\}$ が成り立つ．また，

$$G(z,\tau)=\prod_{a,b\in\{0,\frac{1}{2}\}^2}(\mathbf{f}_{10}(a+\tau b)\,z_{10}+\mathbf{f}_{11}(a+\tau b)\,z_{11}+\mathbf{f}_{01}(a+\tau b)\,z_{01}+\mathbf{f}_{00}(a+\tau b)\,z_{00})$$

とおく．$G(z,\tau)\in\mathcal{O}(\mathfrak{H}_2)[z]$ は K_τ の 16 個の商特異点 $\{(\mathbf{f}_{10}(a+\tau b):\mathbf{f}_{11}(a+\tau b):\mathbf{f}_{01}(a+\tau b):\mathbf{f}_{00}(a+\tau b))\in\mathbb{P}^3\}_{a,b\in\{0,\frac{1}{2}\}^2}$ が定める超平面の定義する一次式を，すべて掛け合わせた多項式である．

定理 4.1. $c_3=2^{-\frac{2}{3}}\pi^{\frac{10}{3}}e^{-8\zeta'(-1)}$ とおく．このとき，

$$\|\varphi(u,\tau)\|^2_{Q,\lambda(\mathcal{O}_C)}=c_3\,e^{-\pi(\mathrm{Im}\,\tau_{11}+\mathrm{Im}\,\tau_{12}+\mathrm{Im}\,\tau_{22})}(\det\mathrm{Im}\tau)^{\frac{1}{3}}|F(u,\tau)|^{-\frac{1}{3}}|G(u,\tau)|^{-\frac{5}{12}}$$

が成り立つ．

証明の方針を簡単に述べよう．$\lambda(\mathcal{O}_C)$ の Quillen 計量は，$\lambda_{\mu_2}(\mathcal{O}_D)$ の μ_2- 同変 Quillen 計量を求めることに帰着される．Bismut による同変 Quillen 計量に関する埋め込み公式（[1]）を用いれば，$\lambda_{\mu_2}(\mathcal{O}_D)$ の μ_2- 同変 Quillen 計量は，$\lambda_{\mu_2}(\mathcal{O}_{A_\tau})$ と $\lambda_{\mu_2}(\mathcal{O}_{A_\tau}(2\Theta_\tau))$ の μ_2- 同変 Quillen 計量から求めることができる．そして，これらの量は，吉川（[11]）と Köhler-Roessler（[5]）の結果を用いて求めることができる．

REFERENCES

[1] J.-M. Bismut, *Equivariant immersions and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **41** (1995), 53–157

[2] J.-B. Bost, J.-F. Mestre and L. Moret-Bailly, *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre* 2, Astérisque No. 183, (1990), 69–105

[3] E. D'Hocker and D. Phong, *On Determinants of Laplacians on Rimemann Surfaces*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 537–545

[4] S. Kawaguchi and K. Yoshikawa, *Complex curves of genus* 3*, Kummer surfaces, and Quillen metrics*, preprint

[5] K. Köhler and D. Roessler, *A fixed point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry IV: the modular height of C.M. abelian varieties*, preprint (math math.AG/0105101)

[6] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann*, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 31–34

[7] B. Ray and I. M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177

[8] P. Sarnak, *Determinants of Laplacians*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 113–120

[9] K. Ueno, *Discriminants of curves of genus* 2 *and arithmetic surfaces*, Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II, 749–770, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[10] A. Verra, *The fiber of the Prym map in genus* 3, Math. Ann. **276** (1987), 433–448

[11] K. Yoshikawa, *Discriminant of theta divisors and Quillen metrics*, J. Differential Geom. **52** (1999), 73–115

[12] K. Yoshikawa, *K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space, I*, preprint (math.AG/9808129)